Интерференция

Ако в еластична среда се намират повече от един източник на трептения, в средата се разпространяват едновременно повече от една вълна. Трептенията на частиците на средата, предизвикани от различните източници се наслагват съгласно принципа на суперпозицията на трептенията. Следователно, вълните се наслагват (събират) съгласно аналогичния принцип на суперпозицията на трептенията. Всяка от вълните се разпространява независимо от останалите, така, както би се разпространявала, ако не би имало останалите. Тези вълни се наслагват (събират) и в резултат, в общия случай, се получава сложен процес, различен от изходните. Ние ще разгледаме най-простите частни случаи.

Наслагването на вълни с постоянна фазова разлика (следователно, с еднакви кръгови честоти) наричаме **интерференция**. Самите вълни наричаме **кохерентни вълни**, а съответните източници –
кохерентни източници
.

Задача: Да се покаже, че ако две вълни имат постоянна (т.е. не зависеща от времето) фазова разлика, те имат еднакви кръгови честоти.

Пример:

Нека O_1 и O_2 са два точкови кохерентни източника на трептене с една и съща кръгова честота и еднаква амплитуда *,* които се намират в еластична среда. Възбудените от тях вълни са сферични. Нека
M
е произволна точка от средата,
r_1
– разстоянието на точка
M
до източника
O_1
,

r_2 – разстоянието на точка M до източника O_2.

Трептенето на точка M като участник във вълновия процес, възбуден от източника O_1 се описва с

$$□_1 (r_1,\ t) = \ \cos(□\ t - \kappa\ r_1 + □_1), \qquad (1)$$

където k е вълновото число, $□_1$ е началната фаза на трептене на източника O_1 (виж Сферични вълни).

Трептенето на точка M като участник във вълновия процес, възбуден от източника O_2 се описва с

$$□_2 (r_2,\ t) = \ \cos(□\ t - \kappa\ r_2 + □_2), \qquad (2)$$

където $□_2$ е началната фаза на трептене на източника O_2.

Трептенето на точка M, получено в резултат на наслагването на трептенията

$□_1 (r_1,\ t)$ и $□_2 (r_2,\ t)$, се описва с

$\square\,(r_1,\, r_2,\, t) = \square_{\,1}\,(r_1,\, t) + \square_{\,2}\,(r_2,\, t).$ (3)

Съответните комплексни представяния $\zeta_1\,(r_1,\, t)$ и $\zeta_2(r_2,\, t)$ на $\square_{\,1}\,(r_1,\, t)$ и $\square_{\,2}\,(r_2,\, t)$ са

$\zeta_1\,(r_1,\, t) = \ e^{\,i\,(\square\ t - \kappa\, r1 + \square\ 1)}$ и $\zeta_2\,(r_2,\, t) = \ e^{\,i\,(\square\ t - \kappa\, r2 + \square\ 2)}$.

$\zeta\,(r_1,\, r_2,\, t) = \zeta_1(r_1,\, t) + \zeta_2(r_2,\, t)$ (4)

е комплексното представяне на трептенето на точка *M*.

$\mathrm{Re}\ \zeta_1(r_1,\, t) = \square_{\,1}(r_1,\, t),$ $\mathrm{Re}\ \zeta_2(r_2,\, t) = \square_{\,2}(r_2,\, t).$

$\mathrm{Re}\ \zeta\,(r_1,\, r_2,\, t) = \square\ (r_1,\, r_2,\, t)$ (5)

описва трептенето на точка *M* (виж (3) и (4)).

За комплексното представяне на трептенето на точка *M* получаваме

$\zeta\,(r_1,\, r_2,\, t) = \zeta_1(r_1,\, t) + \zeta_2(r_2,\, t) = \ (\ r_2\ e^{\,i\,(\square\ 1 - \kappa\, r1)} + r_1\ e^{\,i\,(\square\ 2 - \kappa\, r2)}\ )\ e^{\,i\,\square\ t}$ (6)

Комплексното число

$r_2\ e^{\,i\,(\square\ 1 - \kappa\, r1)} + r_1\ e^{\,i\,(\square\ 2 - \kappa\, r2)} = |\ r_2\ e^{\,i\,(\square\ 1 - \kappa\, r1)} + r_1\ e^{\,i\,(\square\ 2 - \kappa\, r2)}\ |\ e^{\,i\,\square}$,
(7)

където

$\square$ = arctg ,

$| r_2\, e^{\, i(\square\, 1 - \kappa\, r1)} + r_1\, e^{\, i(\square\, 2 - \kappa\, r2)} \,|^{\,2} =$

$(r_2\, e^{\, i(\square\, 1 - \kappa\, r1)} + r_1\, e^{\, i(\square\, 2 - \kappa\, r2)})\,(r_2\, e^{\, -i(\square\, 1 - \kappa\, r1)} + r_1\, e^{\, -i(\square\, 2 - \kappa\, r2)}) =$

$r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_1\, r_2\, e^{\, i[\kappa\,(r1 - r2) - (\square\, 1 - \square\, 2)]} + r_1\, r_2\, e^{\, -i[\kappa\,(r1 - r2) - (\square\, 1 - \square\, 2)]} =$
(8)

$= r_1{}^2 + r_2{}^2 + 2\, r_1\, r_2 \cos\,[\kappa\,(r_1 - r_2) - (\square_1 - \square_2)]\,.$

(*Модулът на всяко комплексно число на квадрат$\square$ е равен на произведението на числото по неговото комплексно спрегнато*)

След като заместим (8) в (7) и след това резултата в (6) за комплексното представяне на трептенето на точка *M* получаваме

$\zeta\,(r_1,\, r_2,\, t) = \quad e^{\, i(\square\, t - \square)}\,.$

Следователно, за резултатното трептене $\square\,(r_1,\, r_2,\, t)$ на произволна точка *M*, намираща се съответно на разстояния
r
1
и

r_2 от двата източника, получаваме (виж (5))

$□\ (r_1,\ r_2,\ t) = \mathrm{Re}\ \zeta\ (r_1,\ r_2,\ t) =$

$= \quad \cos(□\ t - □),$

където

$A(r_1,\ r_2) =$ (9)

е амплитудата на резултатното трептене $□\ (r_1,\ r_2,\ t)$ на точка M, получено от наслагването на трептенията $□_1(r_1,\ t)$ и $□_2(r_2,\ t)$ на точка M.

Напомняне: Вълновото число , където е дължината на вълната.

Да изследваме зависимостта на амплитудата на вълната $A(r_1, r_2)$ от разстоянията r_1 и r_2 от двата източника (виж (9)).

1) Амплитудата на вълната $A(r_1, r_2)$ ще има локални максимуми (интерференчни максимуми) в точките, за които

$$\kappa\,(r_1 - r_2) - (\square_1 - \square_2) = \pm\, 2m\square, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

т.е. в точките, за които

$$r_1 - r_2 = (\square_1 - \square_2 \pm 2m\square) \qquad (10)$$

амплитудата на вълната (виж (9))

$A(r_1, r_2) =$.

2) Амплитудата на вълната $A(r_1, r_2)$ ще има локални минимуми (интерференчни минимуми) в точките, за които

$$\kappa\,(r_1 - r_2) - (\square_1 - \square_2) = \pm\,(2m + 1)\square, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

т.е. в точките, за които

$$r_1 - r_2 = [\square_1 - \square_2 \pm (2m + 1)\square] \qquad (11)$$

амплитудата на вълната (виж (9))

$A(r_1, r_2) = \ = \mid r_1 - r_2 \mid = \mid \ \mid .$

Уравненията (10) и (11) са уравнения на две семейства хиперболоиди с фокуси в точките O_1 и O_2: за всяка стойност на m – по един хиперболоид.

Ако пресечем двете семейства хиперболоиди с равнина, минаваща през двата източника O_1 и O_2 (фокусите на хиперболоидите) ще получим две семейства хиперболи, даващи разположението на точките от равнината, в които амплитудата на трептенето $A(r_1, r_2)$ има съответно локални максимуми или минимуми (виж чертежа по-долу, плътните линии – max, пунктирните линии – min).