

Случайни величини

1. С какво се занимава статистиката

Обект на статистиката са масово проявяващи се явления и процеси в определени териториални и времеви граници. Предмет ѝ е статистична закономерност и тенденция, която се проявява в дадено масово явление за определено време и по определена териториална единица. В този смисъл, статистическото изследване е да задоволи потребностите на статистическата практика. Тя е многоотраслова наука, защото изследва различни обекти - икономически, социални, демографски, природни. Общата теория на статистиката е обединяващо звено, защото осигурява научните основи на статистическото изучаване.

Статистическото изучаване обхваща различни етапи като през всеки един от тях се прилагат различни статистически методи. Обект на всяко статистическото изучаване е някакво масово явление, което се проявява в определени времеви и пространствени граници.

В резултат на статистическото изучаване на икономически и социални факти, явления и процеси се получават статистически величини. Те са конкретни количествени значения на масови явления и процеси за определено време и място. Различни са по съдържание, форма на изразяване и начин на получаване. Статистическите величини биват първични и производни. Първичните се получават в резултат на статистическо наблюдение или групировка и сводка. Затова те са абсолютни величини. Производните статистически величини се получават от първичните или от други производни величини след извършване на необходимите аритметични действия. Такива са относителните и средни величини. Основни видове статистически величини са: абсолютни, относителни и средни

2. Закон за разпределението

Всяка случайна величина се подчинява на определен закон на разпределението. Това е

съотношението, което установява връзката между възможните стойности на случайната променлива и съответната вероятност за тяхното появяване. Този закон се основава на връзката между възможните стойности на случайната променлива и вероятността за появяването им. Всяко теоретично разпределение има свой закон за разпределение. Законът за разпределение на дадена случайна величина може да се представи по 3 начина - таблично, графично и чрез функция (аналитично).

3. Функции на разпределението

Функция на разпределение на случайна величина е функцията $F(x)=P(w:\leq x)$

Функцията $F(x)$ е монотонно ненамаляваща и непрекъсната от ляво. Освен това $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$.

Случайната величина, която приема стойности x_1, x_2, x_3, \dots с вероятности съответно p_1, p_2, p_3, \dots се нарича дискретна.

Ако съществува функция $f(x) \geq 0$ такава, че за всяко x $\int_{-\infty}^x f(x) dx = F(x)$, ще наричаме сл.в. непрекъсната, а функцията $f(x)$ наричаме плътност.

Тогава, разбира се $F(x)$ е непрекъсната, т.е. няма никакви скокове, и плътността е производна на функцията на разпределение $f(x)=F'(x)$ за почти всяко x . Тук почти всяко означава всяко с изключение на изброимо много.

Естествено е, че за да бъде една функция плътност на случайна величина, тя трябва да отговаря на две изисквания:

неотрицателност $f(x) \geq 0$ и

нормираност - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

4. Видове случайни величини

Съществуват следните видове величини:

случайна (стохастична) величина - тя е тази измерима променлива, която приема различни числови стойности под влияние на определени случайни величини и е с неконтролируемо разсейване при многократно възпроизвеждане на явлението. Тя е функция на случайно събитие. Характеризира се с разсейване, което не може да се контролира независимо от броя на случаите, които се наблюдават. Самото отклонение е случайна величина, а размерът на отклонението за всеки елемент от даден вид е стойност на случайна величина. Тази стойност не може да се предскаже, защото се променя случайно при всяко ново изпитание. Самото проявление на дадена стойност на случайна величина се нарича случайно събитие. Различават се 2 вида случайни величини - непрекъснати (индискретни) и прекъснати (дискретни). Непрекъснати са тези, които приемат различни произволни стойности в определен числов интервал.

Прекъснати (дискретни) случайни величини. Те приемат само определени стойности, които са изолирани една от друга. Определянето на дадена случайна величина се извършва въз основа за извадка, която се формира от всички възможно осъществими или мислими единици, които образуват генералната съвкупност N . Тя бива безкрайна и крайна. Безкрайна генерална съвкупност е тази, която се състои от извънредно голям брой единици, т.е. $N \rightarrow \infty$. Крайна генерална съвкупност е тази, която се състои от краен брой единици.

5. Числови характеристики

Математическо очакване на простата случайна величина X приемаща стойности x_1, x_2, \dots, x_n върху събитията от пълната група (H_1, H_2, \dots, H_n) определяме като $E X = \sum_{k=1}^n x_k P(H_k)$.

От това определение се вижда веднага, че числото $E X$ зависи само от стойностите на x_k и вероятностите, с които те се приемат, а не зависи от това за кои точно елементарни събития и каква пълна група това става. Т.е. то не зависи от това в какво вероятностно пространство е реализирана сл.в.

Математическото очакване на непрекъснатата сл.в. X се пресмята като интеграла: $E X = \int x f(x) dx$, а това на дискретна като сумата $E X = \sum_i x_i p_i$, когато това е възможно.

Мода се определя като най - вероятното число за дискретни случайни величини., а за непрекъснати - като координатата на максимума на плътността.

Естествено, разпределенията могат и да не притежават единствена мода. За симетрични разпределения, очевидно трите характеристики: мода (ако има такава), медиана и м.о. съвпадат.

Дисперсията е най - важната характеристика на разсейване на стойностите на случайните величини. Съществуват различни видове дисперсии:

Графика 1: Различни дисперсии

Задача 1:

Провежда се експеримент при който са възможни n – изхода. Това означава, че при всеки конкретен опит СВ X може да приеме една от своите стойности ($X = x_3$). Ако при първия опит се е получил третия изход, то $X=x_3$. За да опишем математически СВ се използват следните подходи:

Строи се таблица от 2 реда и n – стълба. На първият ред – възможните изходи, а на втория – вероятностите с които могат да се получат тези изходи.

Таблица 1

X_1

X_2

...

X_n

P_1

P_2

...

P_n

Таблицата изразява връзката между всички еднакво възможни елементарни събития и тяхната вероятност, затова всеки подход чрез който може да се изрази връзката между ЕС и тяхната вероятност се нарича закон на разпределение на СВ. Следователно таблици 1 и 2 изразяват законите за разпределение на 2 СВ. Те се наричат и ред на

разпределение. Ако реда на разпределение бъде представен графично тогава ще получим многоъгълник на разпределението или хистограма на разпределението.

Таблица 2

1

2

...

6

$1/6$

$1/6$

...

$1/6$

Задача 2

Нека СВ X е резултат от хвърляне на зар. Реда на разпределение на тази СВ е посочен в Таблица 3. Функцията на разпределение F е винаги растяща до крайна 1.

Таблица3

Извод: Функцията на разпределение $F(x_k) = P(X$