2.2.1. Кинематика на материална точка

Кинематиката описва геометричните свойства на движението на телата в зависимост от времето, т.е. съотношението между положението, скоростта и ускорението, без да се интересува от масата на телата и силите предизвикващи това движение.

Нека си мислим произволно движещо се тяло (материална точка). Какво правим за да опишем движението?

Избираме отправно тяло, избираме координатна система ($O;X,Y,Z$). Положението на движещата се в пространството материална точка в произволен момент от време
t
определяме чрез стойността на радиус-вектора в момента от време
t
. Краят на радиус-вектора описва крива, която наричаме траектория на движението (виж чертежа по-долу).

Забележка: *Траекторията на движение зависи от избора на отправното тяло. Пример: Траекторията, която описва точка от перката на летящ вертолет при отправно тяло вертолета е различна от траекторията, която описва същата точка при отправно тяло Земята.*

Да дефинираме физичната величина **път**. Пътят означаваме обикновено с буквата *s*. Стойностите на физичната величина път, като функция на времето се задават чрез дължината
s

(
t
) на кривата, описана от движещото се тяло от началния момент от време до произволно избран момент от време
t
. Пътят е скаларна физична величина. Мерната единица за физичната величина път в системата СИ метър [m].

Нека t е произволно избран момент от време, Δt – произволен интервал от време. Дължината на участъка от траекторията на движение, ограничен от точките с радиус-вектори и наричаме **път**, изминат от момента от време
t
до момента от време
t
+ Δ
t
. Насочената отсечка с начало точката с радиус-вектор и край – точката с радиус-вектор е графичният образ на
преместването
от точката с радиус-вектор до точката с радиус-вектор . Големината на преместването е най-краткият път от точката с радиус-вектор до точката с радиус-вектор , посоката на преместването се определя от посоката на движението. Преместването е векторна физична величина. Мерната единица за физичната величина преместване в системата СИ е метър [m].

Тъй като = ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) ние можем да разложим движението по произволна крива на
три праволинейни движения
– по направленията на осите
X
,
Y
и
Z
, описвани съответно от реалнозначните функции
x
(
t

),
y
(
t
) и
z
(
t
).

(*Обърни внимание на разликата между направление и посока*).

Функциите $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ наричаме **координатни функции**. Преместването можем да разложим на три премествания в направления на осите
X
,
Y
и
Z
съответно, а именно: преместването е сума (векторна) на преместванията , и в направленията на осите
X
,
Y
и
Z
съответно, получени чрез ортогонално проектиране върху съответните оси (виж чертежа по-горе).

(1)

където е вектор насочен в положителната посока на оста *X* и ,   е вектор насочен в положителната посока на оста
Y
и ,   е вектор насочен в положителната посока на оста
Z
и . За краткост наричаме векторите и   единични вектори по осите
X
,
Y
и
Z
съответно.

Напомняне: *Всеки вектор* (*различен от нулевия*) *може да бъде представен като произведение от реално число (положително или отрицателно) и единичен вектор със същото направление.* (*А какво можем да кажем за нулевия вектор*
?)

и (2)

са еднозначно определени и могат да имат както положителни, така и отрицателни стойности. Наричаме ги съответно ***x*-компонента, *y*-компонента и *z*-компонента на вектора** .

Проста задача 1: *При зададена координатна система, всяка наредена тройка реални* *числа еднозначно определя вектор. За да зададем стойността на дадена векторна физична величина ни трябват мерна единица и три числа.*

Забележка: *За да можем в една и съща координатна система да работим с векторни физични величини с различна размерност (например, преместване, скорост, ускорение), ние работим с единичните вектори като с геометрични (безразмерни) величини, а размерностите аташираме към компонентите на съответните вектори.*

Големината на преместването е равна на разстоянието между точките с радиус-вектори и (теорема на Питогор):

.   (3)

Следващата физична величина, която ще дефинираме, е физичната величина скорост на движението. Скоростта е мярка за бързината на движението. Нека най-напред дефинираме понятието средна скорост. Средната скорост при преместването дефинираме чрез:

(4)

,

където са съответно ***x*-компонентата, *y*-компонентата и *z*-компонентата** на средната скорост
в интервала от време Δ
t
;

са средните скорости на движение в направленията на осите *X*, *Y* и *Z* съответно, на които се разлага средната скорост на движение
.

Средната скорост е векторна величина. Тя е еднопосочна с преместването и има размерност LT^{-1}, измерителната единица в системата СИ е [m/s].

Големината на средната скорост . Съществува и друг начин за характеризиране на бързината на движение, при който големина на средната скорост на движение в интервала от време Δ*t* се дефинира чрез . Лесно се вижда, че двете величини са различни. Големината на средната скорост **е скаларна величина** и има размерност LT

–1

, измерителната единица в системата СИ е [m/s].

Ако ние искаме да определим каква е скоростта на тялото в момента от време *t* (избран произволно) и разполагаме само с понятието средна скорост, очевидно бихме могли да отговорим само приблизително на въпроса и с толкова по-голяма точност, колкото по-малък е интервалът от време Δ

t

. Ако искаме да отговорим точно на въпроса, т.е. да намерим

моментната скорост

в момента от време

t

, ние трябва да намерим границата, към която клони , когато Δ

t

клони към нула. Лесно се вижда, че дадените по-горе две различни дефиниции за големина на средната скорост в интервала от време Δ

t

, клонят към една и съща стойност, когато Δ

t

клони към нула.

Напомняне (грубо): Нека f е реалнозначна (гладка) функция на реалната променлива t. Първа п

роизводна

на функцията

f

по

променливата
t
наричаме функцията, означавана с (или еквивалентно с , или
) дефинирана за всяко
t
чрез

.

Пример:

Нека , където t е реална променлива, a и b са константи. Нека намерим първата производна на функцията f по променливата t.

Съгласно горната дефиниция

След горното напомняне ние можем да дефинираме моментната скорост за всеки момент от време, или по-просто казано – скоростта като векторнозначна функция на времето (придружена от мерна единица [m/s]) с помощта на първите производни на координатните функции (виж формула (4)):

, (5)

където за всяка стойност на *t*

(6)

са съответно *x*-, *y*- и *z*-компонентата на вектора на скоростта в момента от време *t*.

задават скоростите на трите праволинейни движения (описани с координатните функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ съответно), на които можем да разложим тримерното движение.

Терминология: Дефинираната по-горе в (5) векторнозначна функция, означена с наричаме първа производна на радиус-вектора по времето.

Казваме, че скоростта се задава с първата производна на радиус-вектора по времето.

Каква е посоката на вектора на скоростта в момента от време t? При Δt ® 0 посоката на клони към положителната посока на допирателната към кривата в точката с радиус-вектор (виж чертежа по-долу и формула (5)). Положителната посока на допирателната се задава от посоката на движение. Следователно, във всеки момент от време t векторът на скоростта е насочен в положителната посока на допирателната към траекторията на движението в точката с радиус-вектор .

Големината на вектора на скоростта във всеки момент от време t:

.

Забележка: Лесно се вижда, че

Ускорение

Ускорението е мярка за бързината, с която се променя скоростта.

Нека най-напред дефинираме понятието средно ускорение за интервала от време Δ*t* от момента от време
t
до момента от време
t
+Δ
t
:

.   (7)

Задача 2: Лесно се вижда, че посоката на средното ускорение в общия случай е различна от посоката на средната скорост. Упътване: направи чертеж.

Разсъждавайки аналогично както при дефинирането на понятието моментна скорост, ние можем да дефинираме моментното ускорение в произволен момент от време *t* чрез граничен преход във формула (7) (виж и формула (5)):

.

Следователно, първите производни по времето на *x*-, *y*- и *z*-компонентата на скоростта, са съответно *x*-, *y*- и *z*-компонента на ускорението. Нека напомним (виж формула (6)), че от своя страна компонентите на скоростта се задават с първите производни по времето на съответните координатни функции или казано накратко компонентите на ускорението се задават с вторите производни на съответните координатни функции. Следователно за всеки момент от време
t

,

където

,

и

са съответно *x*-, *y*- и *z*-компонентата на ускорението.

са ускоренията на трите едномерни движения описани с координатните функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ съответно, на които можем да разложим тримерното движение.

Накратко: Ускорение наричаме първата производна на скоростта по времето, или еквивалентно – втората производна на радиус-вектора по времето:

.

Внимание: Познаването на понятието производна на реалнозначна функция на една реална променлива ни даде възможност да дефинираме производна на векторнозначна функция (чрез производните на компонентите) и съответно да дефинираме производна на векторна физична величина.

Ускорението има размерност LT^{-2}, измерителната единица в системата СИ е [m/s^2].

Твърдение (много важно): В общия случай векторите на ускорението и на скоростта във всеки момент от време не са колинеарни. Защо? Защото ускорението характеризира промяната на скоростта както по големина, така и по посока (подробно: в темата Движение по окръжност).

От Задача 2, формула (7) и дефиницията на моментно ускорение лесно се съобразява, че ускорението винаги е насочено от кривата към "вдлъбнатостта" и от гледна точка на ъгъла, който векторът на скоростта сключва с вектора на ускорението във всеки момент от време има три възможности: остър ъгъл, тъп ъгъл и прав ъгъл (виж чертежа по-долу; подробно: в темата Движение по окръжност).

Ускорително движение Закъснително движение Движение с постоянна

по големина скорост

Напомняне: Векторите и са колинеарни, ако съществува реално число *k*, такова че .

От друга страна , .

Следователно, .

Следователно, .

Пример: Нека движението на тяло (материална точка) се описва с координатните функции . Тогава компонентите на вектора на скоростта във всеки момент от време *t* се задават с

,

а компонентите на вектора на ускорението във всеки момент от време *t*

.

Лесно се вижда, че векторите на скоростта и на ускорението не са колинеарни в никой момент от време.

Забележка: *Понякога за простота на означенията за втора производна на произволна функция f по независимата променлива t вместо се използва означението или еквивалентно (сравни със съответните означения за първа производна).*

Големината на вектора на ускорението във всеки момент от време *t* се задава с

.

Така дефинирахме основните кинематични величини път, преместване, скорост и ускорение, връзките между тях и математичния апарат за тяхното описание. Тези кинематични величини наричаме още линейни за разлика от ъгловите кинематични величини, които ще дефинираме по-късно.

Забележка: Ако разглеждаме само движение на материална точка, чиято траектория на движение е равнинна крива, тогава за удобство, при описание на движението ние избираме координатната система така, че траекторията на движение да лежи в някоя от координатните равнини, например в равнината,определена от осите *X* и *Y*. Тогава *z*-

координатата на движещата се точка е равна на нула във всеки момент от време, което, очевидно, значително опростява описанието. Аналогично, ако траекторията на движение е права линия, тогава за простота, избираме координатната система така, че траекторията на движение да лежи върху една от осите на координатната система, например върху оста *X*. Тогава *y* - и *z* - координатата на движещата се точка са равни на нула във всеки момент от време, което значително опростява описанието.

Степени на свобода

Както вече се убедихме, положението на точка в пространството можем да зададем с помощта на три ортогонални (декартови) координати. Това можем да направим и по друг начин, например, с помощта на така наречените полярни координати или някакви други. Важното е, че за еднозначното определяне на положението на материална точка, която може да се движи по произволен начин в пространството, ни трябват три независими координати. За такава точка казваме, че тя има **три степени на свобода.**

Може да се случи обаче, че при дадени условия точката не може да се движи по произволен начин. Нека си мислим малко топче (материална точка), завързано към единия край на неразтеглив конец, другият край на който е закрепен неподвижно. Ако конецът е опънат, топчето ще може да се движи само по сферичната повърхност с център, намиращ се в точката на закрепване на нишката и радиус, равен на дължината l на нишката. Ако сме си избрали ортогонална координатна система (O; X, Y, Z) с начало O в точката на закрепване на нишката, координатите на точката трябва да удовлетворяват съотношението: , което е уравнението на сферичната повърхнина. Независими остават само две от координатите, третата може да се намери от уравнението на сферата. В този случай казваме, че тялото притежава две степени на свобода.

Могат да бъдат приведени и други примери, в които материалната точка може да се движи само по някаква отнапред зададена повърхнина. Във всички такива случаи казваме, че **на движението са наложени връзки**. Ортогоналните координати x, y, z на такава точка удовлетворяват съотношение от вида $f(x, y, z) = 0$. Само две от координатите остават независими, например x и y. Третата координата z можем да намерим от **уравнението на връзката**. Казваме, че точката притежава **две степени на свобода.**

Ако материална точка е поставена в такива условия, че може да се движи само по някаква отнапред зададена крива, тогава, за да определим положението на точката ни

трябва само една независима координата. Казваме, че тялото притежава **една степен на свобода**.
Независима е само една от ортогоналните координати x, y, z, например x. Останалите две можем да определим от уравнението на кривата (уравнения на връзките). Независимата координата можем да изберем и по друг начин. Тогава трите ортогонални координати можем да изразим чрез избраната от нас една независима координата.

Проста задача: Нека материална точка може да се движи само по отнапред зададена окръжност. Да се покаже, че за независима координата можем да изберем ъгъла, който отсечката, определена от центъра на окръжността и материалната точка, сключва с произволно избрана отнапред друга отсечка, определена от центъра на окръжността и произволно избрана точка от окръжността. Да се изразят ортогоналните координати на материалната точка чрез така избраната независима координата.

Упътване: За да опростим решаването на задачата можем да изберем центъра на окръжността за начало на ортогоналната координатна система, координатната ос X да минава през произволно избраната отнапред точка от окръжността (виж условието на задачата) и координатната ос Y да лежи в равнината определена от окръжността.